ВОЕННО-МОРСКАЯ орденов ЛЕНИНА, ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
и УШАКОВА АКАДЕМИЯ имени Маршала Советского Союза ГРЕЧКО А. А.

А. М. СОЙГИН

МЕТОДЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

ЛЕНИНГРАД
1990

ВОЕННО-МОРСКАЯ орденов ЛЕНИНА, ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
и УШАКОВА АКАДЕМИЯ имени Маршала Советского Союза ГРЕЧКО А. А.

А. М. СОЙГИН

МЕТОДЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

*Утверждено начальником Академии
в качестве учебного пособия
для слушателей Академии*

ЛЕНИНГРАД
1990

С введением в Академии новых программ по высшей математике слушатели переходят к более глубокому изучению векторных пространств, используя уже полученные в училище знания о векторах, матрицах и действиях с ними. В учебном пособии рассматриваются математические методы, которые развиваются в последнее время в целях более глубокого и эффективного использования алгебры векторов и матриц при решении самых разнообразных прикладных задач. Излагаемые методы обладают не только теоретической привлекательностью, но и очень удобны для конкретных вычислений, ибо "нет ничего более практичного, чем хорошая теория".

Учебное пособие предназначено для слушателей инженерных факультетов Академии и для всех, кто интересуется современными аспектами геометрической алгебры.

Ответственный редактор М.И.БЕЛИШЕВ

§ I. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

I.I. Произведение двух векторов

Множеством исходных элементов является множество векторов $a, b, c \dots$ действительного трехмерного евклидова пространства E_3 .

Определим бинарную операцию (алгебраическое умножение) для векторов из E_3 как операцию со свойствами:

I. $aa = |a|^2$;

2. $a(bc) = (ab)c$;

3. $a(b+c) = ab + ac$ и $(b+c)a = ba + ca$.

Преобразуем формально произведение ab к виду

$$ab = \frac{1}{2}(ab+ba) + \frac{1}{2}(ab-ba).$$

Назовем $\frac{1}{2}(ab+ba)$ внутренним произведением векторов a и b и обозначим его $a \cdot b$. Очевидно, что внутреннее произведение коммутативно. Покажем, что оно совпадает с обычным скалярным произведением векторов в E_3. Из свойства I алгебраического умножения векторов и из свойства 3, дистрибутивности, следует

$$|(a+b)|^2 = (a+b)(a+b) = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b .$$

Поскольку операция сложения векторов имеет очевидный геометрический смысл, сравнивая последнее выражение с теоремой косинусов

$$|(a+b)|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\varphi ,$$

получаем (рис.I):

$$a\cdot b=-|a||b|\cos\varphi.$$

В дальнейшем действительные числа будем называть просто скалярами, так как никакое другое поле скаляров не используется.

$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos(\pi-\varphi)$

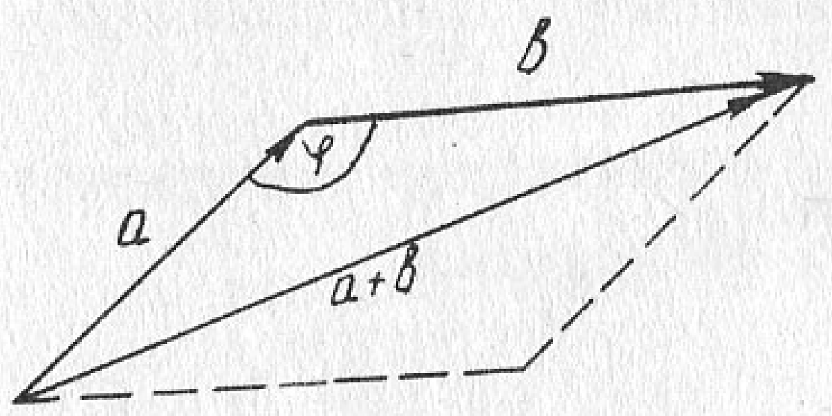

Рис.I

Выражение $\frac{1}{2}(ab-ba)$ назовем внешним произведением и обозначим $a\wedge b$. Внешнее произведение антикоммутативно:

$$a\wedge b=-b\wedge a,$$

поэтому не коммутативно алгебраическое произведение векторов:

$$ab=a\cdot b+a\wedge b;$$
$$ba=a\cdot b-a\wedge b.$$

Внешнее произведение (антисимметричная часть алгебраического произведения) $a\wedge b$ геометрически будет интерпретироваться как ориентированная площадка в пространстве – параллелограмм со сторонами a и b (рис.2).

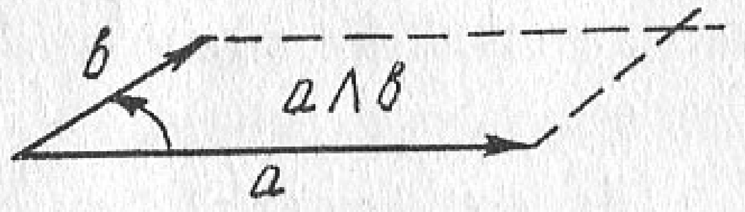

Рис.2

Внешнее произведение $a\wedge b$ есть частный случай б и в е к т о р а. В общем смысле бивектор – это линейная комбинация геометрических объектов, которые определяются значением величины площади и ее ориентацией в пространстве. Это очень похоже на обычное понятие вектора, только размерность геометрического объекта изменяется с единицы на два. Очевидно, что геометрическое представление бивектора не однозначно хотя бы потому, что конкретная форма ориентированной площади заданной величины не играет роли.

Сумма в разложении алгебраического произведения двух векторов на внутреннее и внешнее произведение не является

суммой двух объектов одной природы, дающей третий объект той же природы. Ее можно рассматривать как декартово произведение двух множеств: множества действительных чисел и множества классов эквивалентности площадок в пространстве, причем каждый класс определяется величиной площади и ориентацией площадки в трехмерном пространстве.

Алгебраическое произведение ab несет полную информацию о взаимном расположении векторов a и b, так как по внешнему и внутреннему произведению однозначно определяются плоскость, в которой лежат a и b, и угол между их направлениями. Сами векторы однозначно определить нельзя, так как, например, вращение параллелограмма в своей плоскости не изменяет ни внешнего, ни внутреннего произведения. Но если один из векторов, скажем a, известен, то второй восстанавливается из алгебраического произведения однозначно. Действительно, каждый ненулевой вектор a имеет обратный относительно алгебраического умножения $a^{-1}=\frac{a}{aa}=\frac{a}{|a|^2}$. Тогда $b=a^{-1}(ab)$.

Если векторы a и b коллинеарны, то $a\wedge b=0$ и $ab=a\cdot b$, т.е. a и b коммутируют. Если a и b взаимно ортогональны, то $ab=a\wedge b$ и a антикоммутирует с b:

$$a\parallel b \iff ab-ba=0;$$
$$a\perp b \iff ab+ba=0.$$

I.2. Линейное пространство бивекторов

Если обычные векторы удобно геометрически представлять как стрелки в пространстве, то бивекторы можно изображать в виде замкнутых плоских контуров с указанным направлением обхода.

Если бивектор получается как внешнее произведение двух векторов $a\wedge b$, то изображающий его контур есть параллелограмм, построенный на векторах a и b, с направлением обхода, соответствующим повороту вектора a к вектору b по часовой стрелке или против, но так, чтобы угол поворота был по величине меньше π (рис.3).

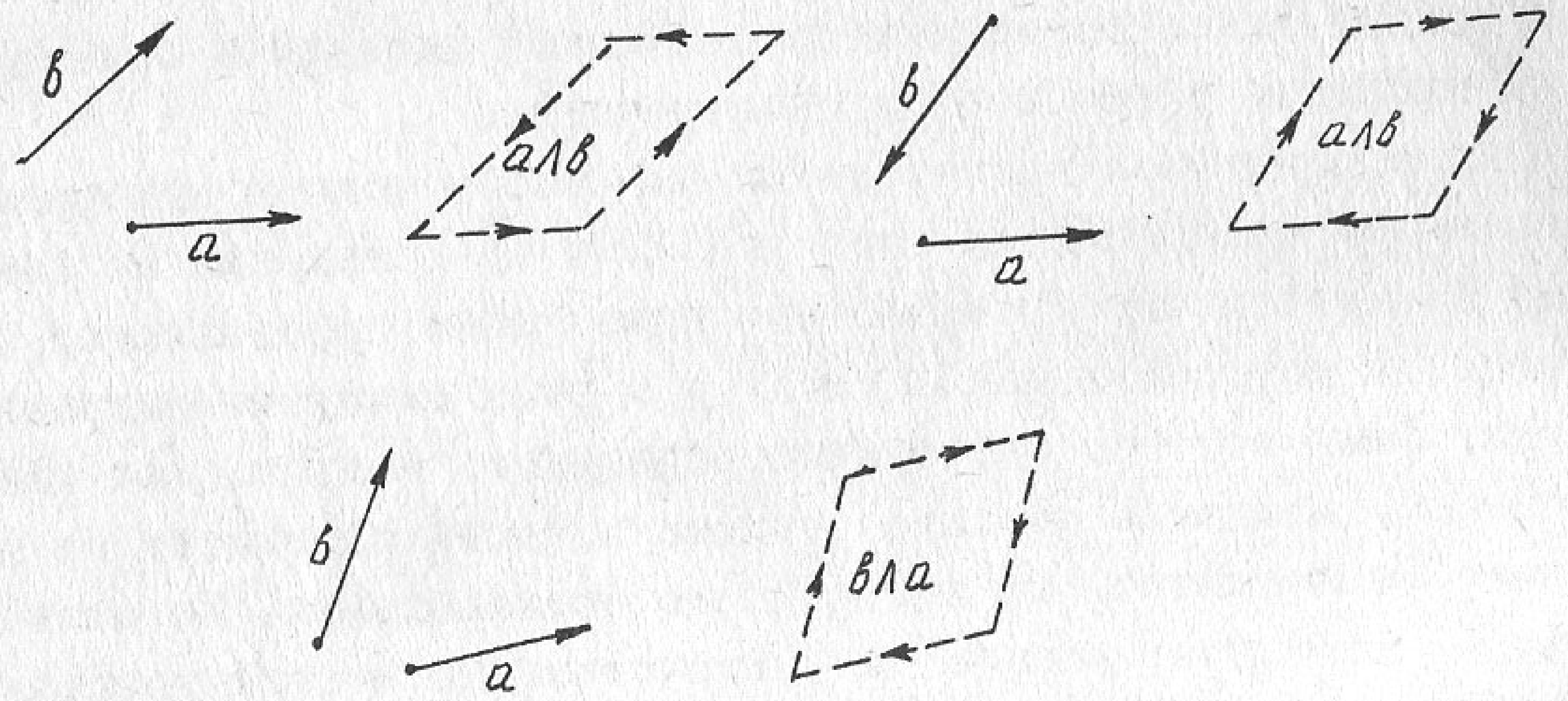

Рис.3

В отличие от векторов бивекторы будут обозначаться прямыми заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C ...

Дадим геометрическую картинку сложения бивекторов, используя их изображение в виде замкнутых контуров. Спроецируем контур, изображающий бивектор B, на плоскость контура A (рис.4). Обозначим эту проекцию B_A. Если направления обхода A и B_A одинаковы, то их суммой будет контур с площадью, равной сумме площадей A и B_A, с направлением обхода, общим для A и B_A, плоскость которого параллельна плоскости A. Если A и B_A имеют разные направления обхода, то из большей площади вычитается меньшая и направление обхода определяется контуром большей площади.

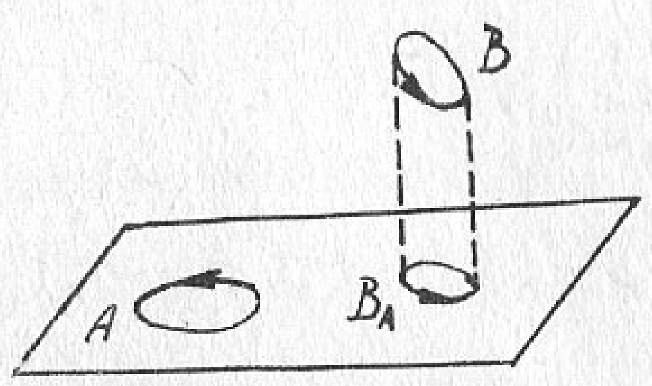

Рис.4

Эта процедура дает еще не сумму A + B, а только проекцию соответствующего A+B контура на плоскость бивектора A. Фактически мы описали правило сложения бивекторов, у которых контуры лежат в параллельных плоскостях. Для полного результата надо спроецировать A на плоскость B и точно так же сложить B и A_B. Тем самым будет получена проекция контура бивектора A + B на плоскость бивектора B. По полученным двум проекциям направленный контур бивектора A+B определяется однозначно.

Процедуру сложения бивекторов можно было бы дать короче, с помощью перехода от ориентированных контуров к эквивалентным векторам: каждому контуру бивектора ставится в соответствие вектор, имеющий длину, численно равную площади внутри контура, и направление, ортогональное к площади контура и согласующееся с направлением обхода контура по правилу правого винта (рис.5).

Рис.5

Поставим в соответствие бивекторам A и B векторы a и b, сложим эти векторы и по полученной сумме однозначно (с точностью до формы границы) восстановим бивектор A + B.

Такой подход проще, но при его использовании может возникнуть мысль, что векторы и бивекторы - это одно и то же. Надо помнить, что изображение бивекторов (контуров с заданным направлением обхода) векторами лишь прием для облегчения геометрического построения суммы. Векторы и бивекторы - это геометрические объекты различной природы. Если последовательно изображать бивекторы векторами, то последние имеют свойства, отличающие их от обычных векторов. В старой терминологии обычные векторы - это полярные векторы, а векторы, соответствующие бивекторам, - аксиальные. Первые (их еще называли "истинными"векторами) не зависят от ориентации базиса, а вторые зависят. Теперь мы понимаем происхождение этих различий.

Умножение бивектора на скаляр изменяет площадь внутри соответствующего контура пропорционально абсолютной величине скаляра, а также ориентацию контура на противоположную, если скаляр отрицательный.

1.3. Произведение вектора и бивектора

Алгебраическое произведение αA представляется как сумма

$$\alpha A = \frac{1}{2}(\alpha A - A\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha A + A\alpha),$$

где первый член опять называется внутренним произведением, а второй – внешним. Внутреннее произведение $\alpha \cdot A$ является вектором, который получается следующим образом. Поставим в соответствие бивектору A вектор по указанному ранее способу и образуем обычное векторное произведение аксиального вектора, соответствующего бивектору A, на вектор α. Это и есть внутреннее произведение $\alpha \cdot A$ (рис.6).

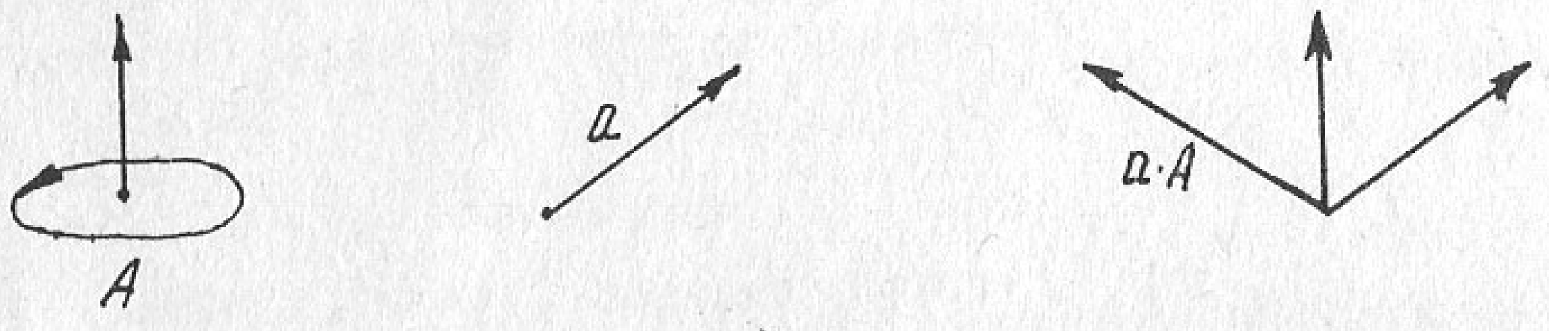

Рис.6

Очевидно, что вектор $\alpha \cdot A$ лежит в плоскости контура, изображающего бивектор A, и ортогонален к α.

Из геометрического смысла внутреннего произведения $\alpha \cdot A$ также следует антикоммутативность:

$$\alpha \cdot A = - A \cdot \alpha .$$

Обратимся к внешнему произведению $\alpha \wedge A$. Если бивектор A изображается направленным замкнутым контуром, а вектор α – стрелкой, то $\alpha \wedge A$ – это ориентированный объем. Его величина равна объему цилиндра, имеющего основанием область, ограниченную замкнутым контуром бивектора A, по которому скользит как образующая вектор α. Если контур бивектора A и вектор α согласуются по правилу правого винта, то

объему приписывается знак плюс, если же A и α образуют левый винт, то объем имеет знак минус.

Внешнее произведение коммутативно, так как в геометрическом определении $\alpha \wedge A$ играет роль только взаимная ориентация вектора α и контура бивектора A.

1.4. Псевдоскаляры

Внешнее произведение $\alpha \wedge A$ есть частный случай т р и в е к т о р а. Если бивектор A является внешним произведением двух векторов: $A = b \wedge c$, то $\alpha \wedge A$ геометрически изображается как ориентированный (в смысле порядка и направления ребер) параллелепипед с ребрами α, b и c.

Подобно тому, как бивектор определяется только величиной площади и ее ориентацией в трехмерном пространстве, произвольный тривектор определяется величиной объема и одной из двух возможных ориентаций. Фактически тривектор – это класс эквивалентности объемов определенной величины и знака. Знак определяется порядком и направлением ребер параллелепипеда, входящего в класс эквивалентности. Если направленные ребра образуют правую тройку, то знак плюс, если левую – то минус. Этот представляющий параллелепипед можно произвольно вращать и даже деформировать при условии сохранения объема – соответствующий тривектор от этого не изменяется.

Можно представлять себе тривектор как катушку или спираль конечной длины с заданным направлением обмотки. Объем внутри катушки равен величине тривектора. Правый или левый винт направления обмотки соответствует двум возможным ориентациям тривектора. Катушку можно как угодно вращать и деформировать, если сохраняется внутренний объем. Можно считать, что спираль накручена на пластилиновый цилиндр. Как бы вы ни мяли потом этот цилиндр с проволокой, это не приведет к изменению тривектора.

Тривектор правой (положительной) ориентации и единичной величины будет обозначаться через i_3. Он называется единичным псевдоскаляром. Латинское i указывает на сходство с мнимой единицей, а индекс 3 обозначает размерность порождающего пространства.

Следовательно, любой тривектор можно записать в виде αi_3, где α - произвольный скаляр. Все тривекторы будем (пока) называть псевдоскалярами.

Псевдоскаляры образуют одномерное линейное пространство с линейными операциями:

$$\lambda T \equiv \lambda\,(\alpha i_3) = (\lambda \alpha) i_3 \,;$$

$$T_1 + T_2 \equiv \alpha_1 i_3 + \alpha_2 i_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) i_3 .$$

Связь единичного псевдоскаляра i_3 с обычной мнимой единицей i состоит в том, что $i_3^2 = -1$. Действительно, возьмем из класса эквивалентных параллелепипедов, изображающих i_3, единичный куб с правой тройкой ребер-векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$. В силу ортогональности ребер и антикоммутативности внешнего произведения

$$e_i e_j = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i = -e_j e_i \text{ при } i \neq j \,;$$

$$e_i e_i = e_i \cdot e_i = 1 , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Алгебраическое произведение векторов ассоциативно, поэтому

$$i_3^2 = (e_1 e_2 e_3)(e_1 e_2 e_3) = -e_1 e_2 e_1 e_3 e_2 e_3 = e_2 e_3 e_2 e_3 = -1 .$$

I.5. Произведение двух бивекторов

Произведение двух бивекторов A и B опять записывается как формальная сумма:

$$AB = \frac{1}{2}\,(AB + BA) + \frac{1}{2}\,(AB - BA) \equiv A \cdot B + A \wedge B .$$

Внутреннее произведение $A \cdot B$ строится геометрически, как скалярное произведение аксиальных векторов, соответствующих ориентированным контурам бивекторов A и B, взятое со знаком минус. Очевидно, $A \cdot B$ коммутативно. Происхождение минуса станет понятным несколько позже.

Внешнее произведение $A \wedge B$ является бивектором, контур которого соответствует вектору, равному векторному произведению $b \times a$ векторов, соответствующих контурам A и B (рис.7).

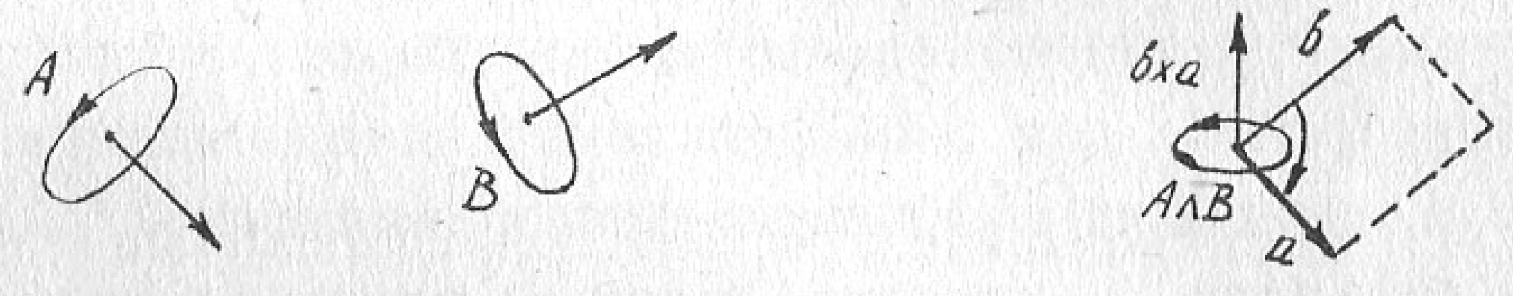

Рис.7

Внешнее произведение бивекторов антикоммутативно.

I.6. Умножение на псевдоскаляр

Достаточно рассмотреть умножение вектора и бивектора на единичный псевдоскаляр i_3.

Если a - вектор, то $i_3 a = a i_3$ есть бивектор, контур которого ограничивает площадь, равную длине вектора a, причем вектор a ортогонален плоскости, в которой лежит контур, и образует с направлением обхода контура правый винт.

Если A - бивектор, то $i_3 A = A i_3$ есть вектор, имеющий длину, равную площади внутри контура бивектора A, ортогональный плоскости контура и составляющий с направлением обхода контура левый винт.

Очевидно использовавшееся выше соответствие между векторами и бивекторами строго определяется через умножение на единичный псевдоскаляр.

Если вектор a получается из бивектора A умножением последнего на i_3, то a называется двойственным A. Если

A получается из a :

$$A = i_3 a,$$

то бивектор A называется двойственным вектору a.

Разная взаимная ориентация в случае вектора, двойственного бивектору, и бивектора, двойственного вектору, связана с тем, что двукратный переход к двойственному меняет знак исходного геометрического объекта:

$$i_3 a = A \,|\, i_3 \,;$$

$$-a = i_3 A \,.$$

Заметим, что умножение псевдоскаляра на i_3 дает скаляр, а повторенное два раза умножение псевдоскаляра на i_3 приводит к изменению ориентации псевдоскаляра.

Если бивектор A является внешним произведением двух векторов: $A = a \wedge b$, то вектор, двойственный A , совпадает с точностью до знака с обычным векторным произведением $a \times b$:

$$-(a \times b) = i_3 (a \wedge b)$$

или

$$a \wedge b = i_3 (a \times b).$$

Операция перехода к двойственному геометрическому объекту устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами и бивекторами.

Пусть A и B - два произвольных бивектора, которые двойственны векторам a и b :

$$A = i_3 a \;, \quad B = i_3 b.$$

Поскольку i_3 коммутирует с векторами и произведение векторов ассоциативно, то

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA) = \frac{1}{2}(i_3 a i_3 b + i_3 b i_3 a) = -\frac{1}{2}(ab + ba);$$

$$A \wedge B = \frac{1}{2}(AB - BA) = -\frac{1}{2}(ab - ba).$$

Этим, в частности, объясняется происхождение минусов в геометрическом определении произведения бивекторов.

Аналогично рассматривается произведение вектора на бивектор. Если бивектор B является двойственным вектору b , то для любого вектора a

$$aB = a \cdot B + a \wedge B = \frac{1}{2}(aB - Ba) + \frac{1}{2}(aB + Ba) = \frac{1}{2} i_3 (ab - ba) +$$

$$+ \frac{1}{2} i_3 (ab + ba) = i_3 (a \wedge b) + i_3 (a \cdot b) = b \times a + i_3 (a \cdot b),$$

что в точности согласуется с приведенной ранее геометрической интерпретацией произведения вектора на бивектор.

I.7. Общий элемент алгебры Клиффорда C_3

Алгебраическое перемножение векторов из E_3 дало нам новые геометрические объекты: скаляры, бивекторы и псевдоскаляры. Все они также могут взаимно перемножаться, но новых геометрических объектов уже не возникает. Следовательно, общий элемент алгебры, порождаемый операциями сложения и алгебраического умножения векторов, имеет вид суммы скаляра, вектора, бивектора и псевдоскаляра:

$$M_3 = (M)_S + (M)_V + (M)_B + (M)_{\mathcal{P}}.$$

Алгебра таких элементов называется алгеброй Клиффорда трехмерного евклидова пространства и будет обозначаться C_3. Алгебра C_3 является также линейным пространством.

Учитывая двойственность между различными геометрическими объектами алгебры C_3 , произвольный элемент $M_3 \in C_3$ можно записать в виде

$$M_3 = \alpha + a + i_3 b + i_3 \beta \,,$$

где α, β - скаляры; a, b - векторы из E_3.

Элементы из C_3 часто называют числами Клиффорда или мультивекторами.

В алгебре C_3 имеются два понятия сопряжения: сопряжение порядка

$$\overline{M}_3 = (M)_{\mathcal{S}} + (M)_V - (M)_B - (M)_{\mathcal{P}}$$

и сопряжение направления

$$\widetilde{M}_3 = (M)_{\mathcal{S}} - (M)_V + (M)_B - (M)_{\mathcal{P}} .$$

Согласно этим определениям, если $M_3 = \alpha + a + i_3 b + i_3 \beta$, то

$$\overline{M}_3 = \alpha + \bar{a} - i_3 b - i_3 \beta ;$$

$$\widetilde{M}_3 = \alpha - a + i_3 b - i_3 \beta .$$

Линейное пространство C_3 можно нормировать, определив

$$\| M_3 \|^2 = (M_3 \overline{M}_3)_{\mathcal{S}} .$$

Скаляр может получиться только при перемножении составляющих M_3 и $\overline{M}_3$ одинаковой геометрической природы, поэтому

$$\| M_3 \|^2 = \alpha^2 + a^2 + b^2 + \beta^2 \geq 0 .$$

I.8. Базис в C_3, порождаемый ортонормированными векторами

Пусть в исходном векторном пространстве E_3 имеется ортонормированный базис, причем векторы базиса e_1, e_2 и e_3 образуют правую тройку. В терминах алгебраического произведения векторов ортонормированность означает, что

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} .$$

Покажем, что бивекторы $e_2 e_3$, $e_3 e_1$ и $e_1 e_2$ образуют базис в линейном подпространстве бивекторов. Пусть A - произвольный бивектор. Представим его в виде $A = i_3 a$. Вектор a однозначно раскладывается по базису $\{ e_1, e_2, e_3 \}$:

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 .$$

Следовательно, A имеет однозначное представление:

$$A = \alpha^1 i_3 e_1 + \alpha^2 i_3 e_2 + \alpha^3 i_3 e_3 = \alpha^1 e_2 e_3 + \alpha^2 e_3 e_1 + \alpha^3 e_1 e_2 .$$

В качестве базиса подпространства псевдоскаляров можно взять тривектор $e_1 e_2 e_3 = e_3 e_1 e_2 = e_2 e_3 e_1$, являющийся представителем класса эквивалентности i_3.

В результате мы видим, что произвольный элемент $M_3 \in C_3$ однозначно представим в базисе:

$$\{ 1(\text{скаляр}), e_1, e_2, e_3, e_2 e_3 = i_3 e_1, e_3 e_1 = i_3 e_2, e_1 e_2 = i_3 e_3, e_1 e_2 e_3 = i_3 \},$$

который порождается правой ортонормированной тройкой векторов $\{ e_1, e_2, e_3 \}$ исходного трехмерного пространства E_3, т.е.

$$M_3 = \alpha + \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 + \beta^1 e_2 e_3 + \beta^2 e_3 e_1 + \beta^3 e_1 e_2 + \beta e_1 e_2 e_3 .$$

Таким образом, размерность C_3 как линейного пространства равна 8(= 2^3).

I.9. Алгебраическое умножение в базисных компонентах

Представим результаты алгебраического перемножения различных элементов из C_3 в разложении по базису.

Для двух произвольных векторов $a, b \in E_3$ получаем

$$ab = (\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3)(\beta^1 e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3) = \alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2 +$$

$$+ \alpha^3 \beta^3 + (\alpha^2 \beta^3 - \alpha^3 \beta^2) e_2 e_3 + (\alpha^3 \beta^1 - \alpha^1 \beta^3) e_3 e_1 + (\alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1) e_1 e_2 .$$

Скалярная часть $a\cdot b=\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3$, как и должно быть, представляет собой скалярное произведение векторов, выраженное через компоненты векторов в ортонормированном базисе. Записывая $e_2e_3=i_3e_1$, $e_3e_1=i_3e_2$, $e_1e_2=i_3e_3$, представляем бивекторную часть в виде

$$a\wedge b=i_3\left[(\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2)e_1+(\alpha^3\beta^1-\alpha^1\beta^3)e_2+(\alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1)e_3\right].$$

Здесь в квадратных скобках получилось известное выражение для векторного произведения в ортонормированном базисе.

Нет необходимости отдельно рассматривать произведение вектора на бивектор и произведение двух бивекторов, так как бивекторы двойственны векторам. Достаточно бескоординатные формулировки представить через компоненты в базисе:

$$aB=(\alpha^1e_1+\alpha^2e_2+\alpha^3e_3)(\beta^1e_2e_3+\beta^2e_3e_1+\beta^3e_1e_2)=$$
$$=(\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)e_1e_2e_3+(\beta^2\alpha^3-\beta^3\alpha^2)e_1+(\beta^3\alpha^1-\beta^1\alpha^3)e_2+$$
$$+(\beta^1\alpha^2-\beta^2\alpha^1)e_3=(a\cdot b)i_3+a\times b,$$

где b – вектор, двойственный бивектору B.

Заметим, что это не противоречит результату п.I.6, так как там роль вектора b играл вектор, двойственным которому был бивектор B. Далее

$$AB=(\alpha^1e_2e_3+\alpha^2e_3e_1+\alpha^3e_1e_2)(\beta^1e_2e_3+\beta^2e_3e_1+\beta^3e_1e_2)=$$
$$=-(\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)-[(\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2)e_2e_3+(\alpha^3\beta^1-$$
$$-\alpha^1\beta^3)e_3e_1+(\alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1)e_1e_2]=-(a\cdot b)-(a\wedge b)=-(a\cdot b)-i_3(a\times b).$$

Здесь a и b двойственны соответственно бивекторам A и B.

§ 2. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

2.I. Алгебра C_1

Введение базиса в C_3 имеет большое значение для перехода от чисто геометрических объектов к их представлениям через числа – компоненты разложения по базису.

У базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$, введенного в п.I.8, был определенный геометрический смысл. Но оказывается, что можно взять базис из чисто алгебраических объектов – матриц. Некоммутативное умножение матриц будет соответствовать алгебраическому перемножению геометрических объектов. При этом получается алгебра, изоморфная алгебре геометрических объектов из § I. В этой матричной алгебре уже не обязательно давать геометрическую интерпретацию преобразованиям. Операции выполняются формально, по известным правилам действий с матрицами.

Но прежде чем ввести матричный базис, порождающий алгебру, изоморфную алгебре из § I, надо выяснить взаимосвязь клиффордовой алгебры, порожденной парой ортонормированных векторов на плоскости, и алгебры комплексных чисел. А начнем мы с еще более простой вещи – алгебры C_1.

Порождающим векторным пространством будет ориентированная прямая E_1 с обычными линейными операциями над лежащими на ней векторами. Алгебраическое умножение двух векторов $a, b\in E_1$ эквивалентно скалярному произведению $a\cdot b$. В результате возникает алгебра C_1 лишь с двумя типами геометрических объектов: векторами порождающего линейного пространства E_1 и скалярами. Следовательно, общий элемент из C_1 имеет вид $M_1=\alpha+a$, где α – скаляр, $a\in E_1$.

В соответствии с п.I.7 можно ввести сопряжения порядка

$$\overline{M}_1 = \propto + \alpha = M_1$$

и направления

$$\widetilde{M}_1 = \propto - \alpha .$$

Норма в C_1 определяется из равенства

$$\|M_1\|^2 = (M_1 \overline{M}_1)_S = (M_1^2)_S = \propto^2 + \alpha^2 .$$

В алгебре C_3 псевдоскаляром назывался элемент, пропорциональный единичному ориентированному геометрическому объекту "максимальной размерности", т.е. ориентированному трехмерному единичному объему. В C_1 имеется только один ориентированный единичный геометрический объект - это единичный вектор e_1, имеющий положительное направление прямой E_1. Следовательно, он же должен играть роль i_1. Но, в отличие от $i_3^2 = -I$, $i_1^2 = I$. Единичный (базисный) вектор $e_1 \in E_1$ порождает базис из двух элементов в C_1: $\{1, e_1\}$.

Каждый элемент $M_1 \in C_1$ однозначно раскладывается по этому базису:

$$M_1 \equiv \propto + \alpha = \propto \cdot 1 + \propto^1 e_1 .$$

Элемент i_1 (он же e_1) определяет двойственность между геометрическими объектами в C_1:

$$i_1 \propto = \propto i_1 = \propto e_1 ;$$

$$i_1 \alpha = \alpha i_1 = \propto^1 e_1 e_1 = \propto^1 .$$

Другими словами, элемент, двойственный в C_1 скаляру $\propto$, - это вектор $\propto e_1$, а двойственный вектору $\propto^1 e_1$ - это скаляр $\propto^1$.

Отметим, что двойственность в C_1 является биекцией между представлениями действительных чисел точками на действительной оси и векторами, направленными из нуля в данную точку числовой оси.

Алгебру C_1 можно построить иначе, чисто формально, без всякой геометрической наглядности, исходя из базисного элемента

$$\mathcal{E}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} .$$

Его квадрат

$$\mathcal{E}_1^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \equiv I .$$

Следовательно, для сохранения аналогии с геометрическим построением C_1 мы должны отождествлять скаляры и скалярные матрицы.

Общим элементом матричного варианта C_1 будет

$$M_1 = \propto \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \propto + \beta & 0 \\ 0 & \propto - \beta \end{Vmatrix} ,$$

т.е. M_1 - это произвольная действительная диагональная матрица 2 x 2.

В случае C_1 матричный вариант, конечно, не дает вычислительных преимуществ. Картина изменится для клиффордовых алгебр более высокой размерности, когда переход от геометрической наглядности к числовым представлениям будет играть существенную роль.

2.2. Алгебра C_2

Порождающим линейным пространством для C_2 будет ориентированная плоскость E_2. Под ориентированностью будем понимать возможность различать положительные (против часовой стрелки) и отрицательные вращения векторов; или положительные (внутренняя область остается слева) и отрицательные направления обхода замкнутых контуров.

Пусть $a, b \in E_2$ - два произвольных вектора на плоскости. Их алгебраическое произведение есть

$$ab = a\cdot b + a\wedge b,$$

где $a\cdot b$ - скалярное произведение векторов (скаляр, действительное число), а $a\wedge b$ - ориентированный параллелограмм, сторонами которого являются векторы a и b, причем ориентация определяется направлением вращения вектора a к вектору b через угол, меньший по модулю, чем π. Очевидно, что

$$a\wedge b = -b\wedge a.$$

Определение алгебраического умножения векторов здесь формально совпадает с C_3 с той только разницей, что бивектор $a\wedge b$ имеет в C_2 лишь две возможные ориентации и является псевдоскаляром в C_2.

Бивектор (внешнее произведение векторов) $a\wedge b$ - это представитель множества ориентированных объектов максимальной размерности, когда порождающим линейным пространством является E_2. Как и в случае C_3, такие объекты - это фактически классы эквивалентности замкнутых контуров на плоскости E_2 заданной ориентации с определенным значением величины площади, заключенной внутри контура. Положительно ориентированный контур с единичной площадью внутри будет называться единичным псевдоскаляром и обозначаться i_2. В дальнейшем мы увидим, что это есть правильное определение того, что обычно называют мнимой единицей. Любой бивектор на E_2 (он же псевдоскаляр) имеет вид $A = \alpha i_2$.

Дальнейшие алгебраические перемножения уже имеющихся геометрических объектов (скаляров, векторов и бивекторов-псевдоскаляров) не дают новых типов объектов. Произведение вектора a на бивектор B интерпретируется точно так же, как в п.I.3, т.е. сводится к вычислению соответствующего векторного произведения (см.рис.6). Результат, как видим,

является вектором, лежащим в плоскости E_2. Такое произведение антикоммутативно.

Пользуясь этой геометрической интерпретацией умножения вектора на бивектор, рассмотрим двойственность в применении к векторам. Пусть i_2 - единичный псевдоскаляр. Тогда произведение ai_2 имеет вид, изображенный на рис.8. Следовательно, правый двойственный a - это вектор, получающийся из a поворотом в плоскости E_2 на 90^0 против часовой стрелки (положительное вращение). В силу антикоммутативности произведения вектора и бивектора, левый двойственный $i_2 a$ есть вектор, получающийся поворотом a на 90^0 по часовой стрелке.

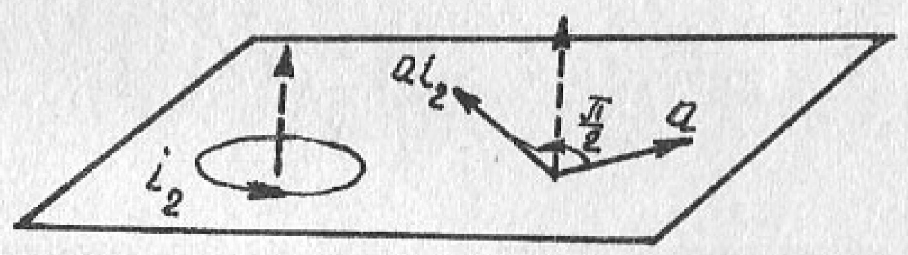

Рис.8

Значение i_2^2 опять найдем согласно геометрической интерпретации, взятой из п.I.5. Произведение единичного бивектора i_2 на себя равно скалярному произведению $i_2 \cdot i_2$ в смысле геометрического варианта алгебры C_3, т.е. взятому со знаком минус скалярному произведению двух единичных совпадающих по направлению векторов. Другими словами,

$$i_2^2 = -1 \quad (\text{скаляр}).$$

Теперь можем записать общий элемент алгебры C_2, порождаемый векторами из E_2,

$$M_2 = \alpha + a + i_2\beta,$$

где α и β - скаляры; a - вектор из E_2; i_2 - единичный псевдоскаляр, т.е. единичный положительно ориентированный замкнутый контур на плоскости E_2.

В алгебре C_2 также определяются два типа сопряжения:

сопряжение порядка

$$\overline{M}_2 = \alpha + a - i_2\beta ;$$

сопряжение направления

$$\widetilde{M}_2 = \alpha - a + i_2\beta .$$

Норма в C_2 определяется по формуле

$$\|M_2\|^2 = (M_2\overline{M}_2)_S = \alpha^2 + a^2 + \beta^2 \geqslant 0 .$$

Возьмем на ориентированной плоскости E_2 два единичных взаимно ортогональных вектора e_1 и e_2, причем e_2 получается из e_1 положительным поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Эти векторы образуют базис в E_2, и для них

$$e_1^2 = e_2^2 = 1; \quad e_1e_2 = e_1\wedge e_2 = i_2 = -e_2e_1 .$$

Учитывая смысл двойственности в C_2, получаем $e_2 = e_1 i_2$.

Возьмем два произвольных вектора $a, b \in E_2$ и перемножим их, разложив по базису $\{e_1, e_2\}$:

$$ab = (\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2)(\beta^1 e_1 + \beta^2 e_2) = \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + i_2(\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1).$$

Это согласуется с указанным ранее геометрическим смыслом алгебраического произведения двух векторов из E_2, если пользоваться правилами вычисления скалярного произведения и площади параллелограмма в декартовых координатах.

Пусть $B = \beta i_2$ – бивектор, тогда

$$aB = (\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2) i_2\beta = (\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_1 i_2) i_2\beta = -\alpha^2\beta e_1 + \alpha^1\beta e_2 .$$

Порождаемый $\{e_1, e_2\}$ базис в C_2 состоит из четырех элементов:

$$\{1, e_1, e_2, i_2 = e_1e_2 = e_1\wedge e_2\} .$$

Любой элемент $M_2 \in C_2$ однозначно разлагается по этому базису:

$$M_2 \equiv \alpha + a + B = \alpha\cdot 1 + \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \beta e_1 e_2 .$$

Размерность C_2 как линейного пространства равна четырем.

2.3. Алгебра C_2 и комплексные числа

Алгебраически множество комплексных чисел определяют обычно как алгебру элементов вида $a + ib$, где a и b – действительные скаляры. Умножение в ней коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Символ i – это формальный объект, который называется "мнимой единицей" и удовлетворяет свойству $i^2 = -1$.

Часто удобнее пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел, когда упорядоченная пара (a, b) изображается точкой или (что обычно считается эквивалентным) вектором на плоскости. Координаты точки (проекции вектора) в заданной прямоугольной системе координат полагаются равными действительной a и мнимой b частям комплексного числа $a + ib$.

Покажем, что построенная выше алгебра C_2 имеет подалгеброй алгебру комплексных чисел. При этом исчезают всякие двусмысленности, связанные с представлением комплексных чисел точками или векторами. Как и в случае C_1, связь этих двух геометрически различных представлений осуществляется через дуальность. "Мнимая единица" приобретает совершенно однозначный геометрический смысл.

Элемент произвольной клиффордовой алгебры называется четным, если $M = \widetilde{M}$. В случае алгебры C_2 четные элементы – это элементы вида

$$M_2^+ = \alpha + i_2\beta .$$

Очевидно, что перемножение четных элементов из C_2 имеет тот же результат, что и перемножение комплексных чисел. Мы получаем коммутативную подалгебру четных элементов из C_2, эквивалентную алгебре комплексных чисел. Разница только в том, что символ i_2 обозначает теперь положительно ориентированный контур на плоскости, ограничивающий единичную площадь.

Четные элементы из C_2 вида $\alpha + i_2\beta$ неудобно геометрически интерпретировать, так как это пары объектов различного геометрического характера - скаляр и замкнутый ориентированный контур. Получим известную интерпретацию, если перейдем к левым i_1- двойственным элементам, т.е. каждому вектору $\alpha + i_2\beta$ поставим в соответствие вектор

$$i_1(\alpha + i_2\beta) = \alpha e_1 + \beta e_1 i_2 = \alpha e_1 + \beta e_2.$$

Общий вывод здесь такой: комплексные числа - это не векторы, а четные элементы в C_2; действия с комплексными числами - это не действия с векторами на плоскости в смысле операций клиффордовой алгебры, а действия в подалгебре C_2^+ четных элементов. Если перейти от четных элементов к их левым i_1- двойственным, то действительно получим векторы на плоскости E_2.

Обратим внимание на следующий геометрический факт. Предположим, что мы взяли две различные плоскости E_2' и E_2'' в трехмерном E_3. На каждой из этих плоскостей можно построить свою алгебру C_2 с подалгеброй комплексных чисел C_2^+. Эти алгебры на различных плоскостях неразличимы, если не рассматривать их погруженными в C_3. Как подалгебры из C_3 они различны. Поэтому при оперировании геометрическими объектами в E_3, если где-то присутствует "мнимая единица", надо указывать, какая конкретно ориентированная плоскость $E_2 \subset E_3$ генерирует эту "мнимую единицу".

2.4. Матричный базис в C_2

Возьмем две матрицы:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}; \qquad \mathcal{E}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Будем рассматривать их как формальный алгебраический базис, порождающий клиффордову алгебру, изоморфную описанной в пп.2.2, 2.3 геометрической алгебры. Алгебраическое умножение будет обычным матричным умножением. Тогда элементы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ оказываются нормированными:

$$\mathcal{E}_1^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\mathcal{E}_2^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и ортогональными:

$$2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь мы опять отождествляем скалярные матрицы со скалярами.

Линейное пространство, растягиваемое $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, состоит из матриц вида

$$\alpha^1\mathcal{E}_1 + \alpha^2\mathcal{E}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha^1 & 0 \\ 0 & -\alpha^1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & -\alpha^1 \end{Vmatrix}.$$

Пусть имеются два таких элемента (вектора):

$$a = \begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & -\alpha^1 \end{Vmatrix}; \quad b = \begin{Vmatrix} \beta^1 & \beta^2 \\ \beta^2 & -\beta^1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha b = \begin{Vmatrix} \alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -\alpha^2\beta^1+\alpha^1\beta^2 \\ -\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Первое слагаемое соответствует скаляру, представляющему собой обычное выражение для значения скалярного произведения двух векторов в декартовых координатах.

Единичный псевдоскаляр в матричном базисе

$$i_2 = \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = \begin{Vmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Он удовлетворяет нужному свойству:

$$i_2^2 = \begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} -\mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{Vmatrix},$$

и бивектор $a \wedge b$ равен

$$a \wedge b = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1 \\ -(\alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1) & 0 \end{Vmatrix} = (\alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1)\, i_2,$$

т.е. это псевдоскаляр, величина которого равна площади параллелограмма, если $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ считать величинами проекций сторон параллелограмма на координатные оси.

Общим элементом алгебры Клиффорда, порождаемой $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, будет

$$M_2 = \alpha^0 \begin{Vmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{Vmatrix} + \alpha^1 \begin{Vmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{Vmatrix} + \alpha^2 \begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \alpha^3 \begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^0+\alpha^1 & \alpha^2+\alpha^3 \\ \alpha^2-\alpha^3 & \alpha^0-\alpha^1 \end{Vmatrix},$$

т.е. произвольная действительная 2 х 2 матрица. Разложение действительной 2 х 2 матрицы

$$\begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix}$$

по базису $\{1, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, i_2 = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\}$ имеет компоненты:

$$\alpha^0 = \frac{x+t}{2}, \quad \alpha^1 = \frac{x-t}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{y+z}{2}, \quad \alpha^3 = \frac{y-z}{2}.$$

Четный элемент из C_2 будет иметь матричное представление:

$$M_2^+ = \alpha^0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \alpha^3 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^3 \\ -\alpha^3 & \alpha^1 \end{Vmatrix}.$$

Матрицы такого вида коммутируют:

$$\begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^3 \\ -\alpha^3 & \alpha^1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta^1 & \beta^3 \\ -\beta^3 & \beta^1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^1\beta^1-\alpha^3\beta^3 & \alpha^1\beta^3+\alpha^3\beta^1 \\ -\alpha^1\beta^3-\alpha^3\beta^1 & \alpha^1\beta^1-\alpha^3\beta^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \beta^1 & \beta^3 \\ -\beta^3 & \beta^1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^3 \\ -\alpha^3 & \alpha^1 \end{Vmatrix},$$

и их умножение согласуется с умножением комплексных чисел:

$$\begin{Vmatrix} \alpha^1\beta^1-\alpha^3\beta^3 & \alpha^1\beta^3+\alpha^3\beta^1 \\ -\alpha^1\beta^3-\alpha^3\beta^1 & \alpha^1\beta^1-\alpha^3\beta^3 \end{Vmatrix} = (\alpha^1\beta^1-\alpha^3\beta^3) \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} +$$

$$+ (\alpha^1\beta^3+\alpha^3\beta^1) \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = (\alpha^1\beta^1-\alpha^3\beta^3)\mathrm{I} + (\alpha^1\beta^3+\alpha^3\beta^1)\, i_2.$$

2.5. Матричный базис, порождающий C_3

Если определять C_3 чисто алгебраически, начиная с введения формального ортонормированного базиса из трех элементов, то и алгебра Клиффорда, возникающая из физических векторов, и вводимая ниже матричная алгебра являются изоморфными представлениями C_3. При отсутствии геометрической интерпретации алгебраическое умножение приходится сразу определять в терминах выбранного базиса.

При построении матричного варианта C_2 были взяты базисные элементы:

$$\mathcal{E}_1=\begin{Vmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{Vmatrix};\qquad \mathcal{E}_2=\begin{Vmatrix}0&I\\I&0\end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь три матрицы:

$$\sigma_1=\begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&-I&0\\ 0&0&0&-I\end{Vmatrix};\ \sigma_2=\begin{Vmatrix} 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\\ I&0&0&0\\ 0&I&0&0\end{Vmatrix};\ \sigma_3=\begin{Vmatrix} 0&0&0&-I\\ 0&0&I&0\\ 0&I&0&0\\ -I&0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Матрицы σ_1 и σ_2 получены из $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ заменой элементов матриц на соответствующие скалярные матрицы 2 x 2, а σ_3 может быть записана как блочная матрица:

$$\sigma_3=\left\Vert\begin{array}{c:c} 0 & -i_2\\ \hdashline i_2 & 0\end{array}\right\Vert,$$

где

$$i_2=\begin{Vmatrix}0&I\\-I&0\end{Vmatrix}.$$

З а м е ч а н и е: обычно матрицы σ_1, σ_2, σ_3 (так называемые матрицы Паули) вводятся как матрицы второго порядка:

$$\sigma_1=\begin{Vmatrix}0&I\\I&0\end{Vmatrix};\quad \sigma_2=\begin{Vmatrix}0&-i\\i&0\end{Vmatrix};\quad \sigma_3=\begin{Vmatrix}I&0\\0&-I\end{Vmatrix},$$

где i - формальная мнимая единица. У нас i имеет вполне определенную интерпретацию, являясь единичным псевдоскаляром i_2 алгебры C_2. В матричном варианте это матрица 2 x 2. Поэтому, чтобы сохранить аналогию с обычной алгеброй матриц Паули, мы вынуждены увеличить размерность базисных матриц. Кроме того, здесь другой порядок матриц в базисе, так как мы не могли ввести i_2, не имея $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, а $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ уже использованы как базис, порождающий C_2. Приходится выбирать между согласованностью базисов $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$ и $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ и изменением традиционного порядка матриц $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Заметим, что ориентация базиса $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ остается прежней.

Покажем, что с введенными матрицами размера 4 x 4 можно формально обращаться, как с матрицами 2 x 2, у которых каждый элемент подразумевается эквивалентным скалярной матрице 2 x 2. Достаточно проверить согласованность умножений:

$$\sigma_1^2=\begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&-I&0\\ 0&0&0&-I\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&-I&0\\ 0&0&0&-I\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\end{Vmatrix};\\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix}I&0\\0&-I\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}I&0\\0&-I\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}I&0\\0&I\end{Vmatrix};\end{cases}$$

$$\sigma_2^2=\begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\\ I&0&0&0\\ 0&I&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\\ I&0&0&0\\ 0&I&0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\end{Vmatrix};\\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix}0&I\\I&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&I\\I&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}I&0\\0&I\end{Vmatrix};\end{cases}$$

$$\sigma_3^2=\begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0&0&0&-I\\ 0&0&I&0\\ 0&I&0&0\\ -I&0&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0&0&0&-I\\ 0&0&I&0\\ 0&I&0&0\\ -I&0&0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\end{Vmatrix};\\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix}0&-i_2\\i_2&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&-i_2\\i_2&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}I&0\\0&I\end{Vmatrix};\end{cases}$$

$$\sigma_1\sigma_2=\begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} I&0&0&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&-I&0\\ 0&0&0&-I\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\\ I&0&0&0\\ 0&I&0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0&0&I&0\\ 0&0&0&I\\ -I&0&0&0\\ 0&-I&0&0\end{Vmatrix};\end{cases}$$

$$
\left|\;\text{вариант } 2\times 2 \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},\right.
$$

$$
\sigma_2\sigma_1 = \begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \end{cases}
$$

$$
\sigma_2\sigma_3 = \begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & -i_2 \end{Vmatrix}; \end{cases}
$$

$$
\sigma_3\sigma_2 = \begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}; \\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -i_2 & 0 \\ 0 & i_2 \end{Vmatrix}; \end{cases}
$$

$$
\sigma_3\sigma_1 = \begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix}; \end{cases}
$$

$$
\sigma_1\sigma_3 = \begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ -i_2 & 0 \end{Vmatrix}; \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned} i_3 &= \\ =\sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= \begin{cases} \text{вариант } 4\times 4 & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}; \\ \text{вариант } 2\times 2 & \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & i_2 \end{Vmatrix}. \end{cases} \end{aligned}
$$

Эквивалентность вариантов 4 х 4 и 2 х 2 позволяет записывать базис $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ в сокращенной форме:

$$
\sigma_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix}.
$$

Попутно мы показали, что базис $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ является ортонормированным.

2.6. Алгебраическое умножение в матричном базисе

Общий элемент трехмерного действительного линейного пространства, растягиваемого матрицами σ_1, σ_2, σ_3, имеет вид

$$
\lambda^1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + \lambda^2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \lambda^3 \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 - i_2\lambda^3 \\ \lambda^2 + i_2\lambda^3 & \lambda^1 \end{Vmatrix},
$$

т.е. это эрмитова матрица с нулевым следом. В развернутом варианте 4 x 4 результат имеет вид

$$\lambda^1\sigma_1+\lambda^2\sigma_2+\lambda^3\sigma_3 = \begin{Vmatrix} \lambda^1 & 0 & \lambda^2 & -\lambda^3 \\ 0 & \lambda^1 & \lambda^3 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & -\lambda^1 & 0 \\ -\lambda^3 & \lambda^2 & 0 & -\lambda^1 \end{Vmatrix}.$$

Перемножим две такие матрицы:

$$l = \begin{Vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 - i_2\lambda^3 \\ \lambda^2+i_2\lambda^3 & -\lambda^1\end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad m = \begin{Vmatrix} \mu^1 & \mu^2 - i_2\mu^3 \\ \mu^2+i_2\mu^3 & -\mu^1\end{Vmatrix},$$

разложив результат на внутренние и внешние произведения:

$$lm = lm + l\wedge m = \frac{1}{2}(lm+ml)+\frac{1}{2}(lm-ml)=$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda^1\mu^1+\lambda^2\mu^2+\lambda^3\mu^3 & 0 \\ 0 & \lambda^1\mu^1+\lambda^2\mu^2+\lambda^3\mu^3 \end{Vmatrix} +$$

$$+\begin{Vmatrix} i_2(\lambda^2\mu^3+\lambda^3\mu^2) & \lambda^1\mu^2-\lambda^2\mu^1+i_2(-\lambda^1\mu^3+\lambda^3\mu^1) \\ -(\lambda^1\mu^2-\lambda^2\mu^1)+i_2(-\lambda^1\mu^3+\lambda^3\mu^1) & -i_2(\lambda^2\mu^3-\lambda^3\mu^2)\end{Vmatrix}=$$

$$= (\lambda^1\mu^1+\lambda^2\mu^2+\lambda^3\mu^3)\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix} + (\lambda^2\mu^3-\lambda^3\mu^2)\begin{Vmatrix} i_2 & 0\\ 0 & -i_2\end{Vmatrix} +$$

$$+(\lambda^3\mu^1-\lambda^1\mu^3)\begin{Vmatrix}0&i_2\\i_2&0\end{Vmatrix}+(\lambda^1\mu^2-\lambda^2\mu^1)\begin{Vmatrix}0&1\\-1&0\end{Vmatrix}.$$

Выясним, нельзя ли "выносить" i_2 из матрицы как множитель. Если записать получившиеся здесь матрицы в развернутом виде 4 x 4:

$$\begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & -i_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \qquad \begin{Vmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

то легко проверить, что

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = i_3 \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} i_3;$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = i_3 \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} i_3;$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = i_3 \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} i_3,$$

где

$$i_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & i_2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & -i_2 \end{Vmatrix} = i_3 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = i_3\sigma_1 ;$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = i_3 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = i_3\sigma_2 ;$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = i_3 \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} = i_3\sigma_3 .$$

В результате, вспоминая правила вычисления скалярного и векторного произведения в ортонормированном базисе, приходим к известному соотношению:

$$\ell m = (\lambda^1\mu^1 + \lambda^2\mu^2 + \lambda^3\mu^3)I + i_3\left[(\lambda^2\mu^3 - \lambda^3\mu^2)\sigma_1 + (\lambda^3\mu^1 - \lambda^1\mu^3)\sigma_2 + (\lambda^1\mu^2 - \lambda^2\mu^1)\sigma_3\right] = (\ell\cdot m)I + i_3\,(\ell\times m).$$

Линейное подпространство бивекторов в матричном базисе $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ есть множество матриц вида:

$$\beta^1\sigma_2\sigma_3 + \beta^2\sigma_3\sigma_1 + \beta^3\sigma_1\sigma_2 = \beta^1 \begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & -i_2 \end{Vmatrix} + \beta^2 \begin{Vmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix} + \beta^3 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= i_3(\beta^1\sigma_1 + \beta^2\sigma_2 + \beta^3\sigma_3) =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta^1 & 0 & \beta^2 & -\beta^3 \\ 0 & \beta^1 & \beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta^3 & -\beta^1 & 0 \\ -\beta^3 & \beta^2 & 0 & -\beta^1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \beta^1 & \beta^3 & \beta^2 \\ -\beta^1 & 0 & -\beta^2 & \beta^3 \\ -\beta^3 & \beta^2 & 0 & -\beta^1 \\ -\beta^2 & -\beta^3 & \beta^1 & 0 \end{Vmatrix} .$$

В сокращенной записи

$$i_3(\beta^1\sigma_1 + \beta^2\sigma_2 + \beta^3\sigma_3) = i_3\left(\beta^1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + \beta^2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \beta^3 \begin{Vmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{Vmatrix}\right) = i_3 \begin{Vmatrix} \beta^1 & \beta^2 - i_2\beta^3 \\ \beta^2 + i_2\beta^3 & -\beta^1 \end{Vmatrix} .$$

Видно, что в матричном варианте выполняется взаимно однозначная i_3-двойственность между векторами и бивекторами.

Произведение двух матриц, соответствующих бивекторам, будет

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ -\alpha^1 & 0 & -\alpha^2 & \alpha^3 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & 0 & -\alpha^1 \\ -\alpha^2 & -\alpha^3 & \alpha^1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \beta^1 & \beta^3 & \beta^2 \\ -\beta^1 & 0 & -\beta^2 & \beta^3 \\ -\beta^3 & \beta^2 & 0 & -\beta^1 \\ -\beta^2 & -\beta^3 & \beta^1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= -(\alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3)I - i_3\left[(\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)\sigma_1 + (\alpha^3\beta^1 - \alpha^1\beta^3)\sigma_2 + (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)\sigma_3\right].$$

То же самое в сокращённом варианте записи базиса:

$$AB = i_3 \begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 - i_2\alpha^3 \\ \alpha^2 + i_2\alpha^3 & -\alpha^1 \end{Vmatrix} i_3 \begin{Vmatrix} \beta^1 & \beta^2 - i_2\beta^3 \\ \beta^2 + i_2\beta^3 & -\beta^1 \end{Vmatrix} =$$

$$= -(\alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3)I - \left[(\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2) \begin{Vmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & -i_2 \end{Vmatrix} + \right.$$

$$+(\alpha^3\beta^1-\alpha^1\beta^3)\begin{Vmatrix}0 & i_2\\ i_2 & 0\end{Vmatrix}+(\alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1)\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}\Bigg].$$

Произведение вектора на бивектор

$$\alpha B=(\alpha^1\sigma_1+\alpha^2\sigma_2+\alpha^3\sigma_3)(\beta^1\sigma_2\sigma_3+\beta^2\sigma_3\sigma_1+\beta^3\sigma_1\sigma_2)=$$

$$=\begin{Vmatrix}\alpha^1 & 0 & \alpha^2 & -\alpha^3\\ 0 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^2\\ \alpha^2 & \alpha^3 & -\alpha^1 & 0\\ -\alpha^3 & \alpha^2 & 0 & -\alpha^1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0 & \beta^1 & \beta^3 & \beta^2\\ -\beta^1 & 0 & -\beta^2 & \beta^3\\ -\beta^3 & \beta^2 & 0 & -\beta^1\\ -\beta^2 & -\beta^3 & \beta^1 & 0\end{Vmatrix}=$$

$$=(\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)i_3+(\beta^2\alpha^3-\beta^3\alpha^2)\sigma_1+$$

$$+(\beta^3\alpha^1-\beta^1\alpha^3)\sigma_2+(\beta^1\alpha^2-\beta^2\alpha^1)\sigma_3 .$$

То же самое получается при сокращенной записи:

$$\alpha B=\begin{Vmatrix}\alpha^1 & \alpha^2-i_2\alpha^3\\ \alpha^2+i_2\alpha^3 & -\alpha^1\end{Vmatrix} i_3\begin{Vmatrix}\beta^1 & \beta^2-i_2\beta^3\\ \beta^2+i_2\beta^3 & -\beta^1\end{Vmatrix}.$$

Все эти результаты эквивалентны формулам из п.I.9 и согласуются с первоначальной геометрической интерпретацией алгебраических операций над векторами.

2.7. Алгебра C_3 в матричной записи

Матричная алгебра, порождаемая базисными ортонормированными матрицами σ_1, σ_2 и σ_3, имеет, в частности, следующие линейные подпространства.

I. Одномерное подпространство скалярных матриц.

2. Трехмерное подпространство, растягиваемое матрицами σ_1, σ_2 и σ_3, состоящее, в сокращенной записи, из эрмитовых матриц 2 x 2 с нулевым следом:

$$\lambda^1\sigma_1+\lambda^2\sigma_2+\lambda^3\sigma_3=\begin{Vmatrix}\lambda^1 & \lambda^2-i_2\lambda^3\\ \lambda^2+i_2\lambda^3 & -\lambda^1\end{Vmatrix}.$$

3. Трехмерное подпространство, растягиваемое матрицами

$$\sigma_2\sigma_3=i_3\sigma_1=\begin{Vmatrix}i_2 & 0\\ 0 & -i_2\end{Vmatrix};$$

$$\sigma_3\sigma_1=i_3\sigma_2=\begin{Vmatrix}0 & i_2\\ i_2 & 0\end{Vmatrix};$$

$$\sigma_1\sigma_2=i_3\sigma_3=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix},$$

с общим элементом

$$i_3\begin{Vmatrix}\beta^1 & \beta^2-i_2\beta^3\\ \beta^2+i_2\beta^3 & -\beta^1\end{Vmatrix},$$

который i_3 двойствен элементу из предыдущего пункта.

4. Одномерное подпространство, натянутое на единичный псевдоскаляр:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\begin{Vmatrix}i_2 & 0\\ 0 & i_2\end{Vmatrix}=i_3 .$$

Общий элемент такой алгебры является произвольной линейной комбинацией матриц $I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_3$:

$$M_3 = \alpha^0 I + \alpha^1\sigma_1 + \alpha^2\sigma_2 + \alpha^3\sigma_3 + \beta^1\sigma_2\sigma_3 + \beta^2\sigma_3\sigma_1 + \beta^3\sigma_1\sigma_2 + \\ + \beta^0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (\alpha^0+\alpha^1) + i_2(\beta^0+\beta^1) & (\alpha^2+\beta^3) + i_2(\beta^2-\alpha^3) \\ (\alpha^2-\beta^3) + i_2(\beta^2+\alpha^3) & (\alpha^0-\alpha^1) + i_2(\beta^0-\beta^1) \end{matrix} \right\|,$$

т.е. в сокращенном варианте записи 2 х 2 общий элемент M_3 - это произвольная комплекснозначная 2 х 2 матрица, в которой комплекснозначные элементы рассматриваются как четные элементы из C_2 .

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В C_3

3.I. Отражения

Пусть a - заданный вектор в E_3 единичной длины. Рассмотрим отображение:

$$E_3 \ni x \longrightarrow -a x a \equiv \tilde{a} x a .$$

Вектор $\tilde{a}$, направленно-сопряженный к a , лежит в плоскости бивектора $x \wedge a$, поэтому произведение $\tilde{a}$ на $x \wedge a$ содержит только векторную часть, т.е. $\tilde{a} x a$ является вектором. Его квадрат равен

$$(\tilde{a} x a)^2 = \tilde{a} x a \tilde{a} x a = -\tilde{a} x^2 a = -|x|^2 \tilde{a} a = |x|^2 = x^2.$$

Следовательно, преобразование

$$x \longrightarrow x' = \tilde{a} x a , \quad |a| = 1$$

сохраняет длину.

Разложим вектор x в сумму двух векторов, параллельного a и ортогонального к a :

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp} .$$

Это разложение можно получить алгебраически, пользуясь правилами умножения:

$$x = x a^2 = (x a) a = (x \cdot a + x \wedge a) a = (x \cdot a) a + (x \wedge a) a ,$$

т.е.

$$x_{\parallel} = (x \cdot a) a ; \quad x_{\perp} = (x \wedge a) a .$$

Выполним над этими векторами рассматриваемое преобразование:

$$x'_{\parallel} = \tilde{a} ((x \cdot a) a) a = -(x \cdot a) a = -x_{\parallel} ;$$

$$x'_\perp = \tilde{a}((x\wedge a)a)a = \tilde{a}(x\wedge a) = -(x\wedge a)\tilde{a} = (x\wedge a)a = x_\perp .$$

Следовательно,

$$x' = x'_\parallel + x'_\perp = -x_\parallel + x_\perp .$$

Получается, что преобразование $x \to x'$ является отражением относительно плоскости, ортогональной к a.

Рассмотрим отражение в матричном представлении. Вектору x с компонентами ξ^1, ξ^2, ξ^3 в базисе σ_1, σ_2, σ_3 соответствует матрица

$$\begin{Vmatrix} \xi^1 & \xi^2 - i_2\xi^3 \\ \xi^2 + i_2\xi^3 & -\xi^1 \end{Vmatrix} .$$

Элементы матрицы, соответствующей a,

$$\begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 - i_2\alpha^3 \\ \alpha^2 + i_2\alpha^3 & -\alpha^1 \end{Vmatrix}$$

подчиняются условию $(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 = 1$.
Тогда

$$x' = -axa = \begin{Vmatrix} \xi^1 - 2\alpha^1(x\cdot a) & \xi^2 - i_2\xi^3 - 2(x\cdot a)(\alpha^2 - i_2\alpha^3) \\ \xi^2 + i_2\xi^3 - 2(x\cdot a)(\alpha^2 + i_2\alpha^3) & -\xi^1 + 2\alpha^1(x\cdot a) \end{Vmatrix} =$$

$$= -(x\cdot a)\begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 - i_2\alpha^3 \\ \alpha^2 + i_2\alpha^3 & -\alpha^1 \end{Vmatrix} + \left[\begin{Vmatrix} \xi^1 & \xi^2 - i_2\xi^3 \\ \xi^2 + i_2\xi^3 & -\xi^1 \end{Vmatrix} - \right.$$

$$\left. -(x\cdot a)\begin{Vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 - i_1\alpha^3 \\ \alpha^2 + i_2\alpha^3 & -\alpha^1 \end{Vmatrix}\right] ,$$

что согласуется с отражением как изменением направления проекции x на a при сохранении компоненты x, ортогональной к a.

3.2. Конечные вращения

Рассмотрим композицию двух отражений, определяемых единичными векторами a и b:

$$x'' = \tilde{b}x'b = \tilde{b}(\tilde{a}xa)b .$$

Умножение векторов ассоциативно, поэтому

$$x'' = (\tilde{b}\tilde{a})x(ab) = (ba)x\overline{(ba)} ,$$

где, как мы помним, черта сверху означает сопряжение порядка, меняющее знак бивекторной и псевдоскалярной частей мультивектора.

Поскольку a и b - единичные векторы, то их произведение $ba \equiv U$ можно представить в виде

$$U = a\cdot b + b\wedge a = \cos|\theta| + i_{ba}\sin|\theta| ,$$

где $|\theta|$ - величина угла между векторами a и b, а i_{ba} - единичный бивектор той же ориентации, что и $b\wedge a$. Этот бивектор выполняет роль "мнимой единицы" в плоскости векторов a и b, ориентированной вращением b к a на угол меньше π. Очевидно $i_{ba}^2 = -1$.

Для выяснения смысла преобразования

$$x \longrightarrow Ux\overline{U} ,$$

где $\overline{U} = \cos|\theta| - i_{ba}\sin|\theta| = \cos|\theta| + i_{ab}\sin|\theta|$,

разложим вектор x на составляющую $x_\parallel$, параллельную плоскости i_{ba}, и $x_\perp$, ортогональную к ней:

$$x = x_\parallel + x_\perp .$$

Причем эти составляющие опять можно получить чисто алгебраически:

$$x = -x i_{b\alpha}^2 = (x\cdot i_{\alpha b})\, i_{b\alpha} + (x\wedge i_{\alpha b})\, i_{b\alpha} .$$

Здесь внутреннее произведение $x\cdot i_{\alpha b}$ дает вектор, лежащий в плоскости $i_{b\alpha}$, причем векторы $i_3 i_{\alpha b}$, x и $x\cdot i_{\alpha b}$ образуют правую тройку. Пюизведение вектора $x\cdot i_{\alpha b}$, лежащего в плоскости $i_{b\alpha}$, с бивектором $i_{b\alpha}$ содержит только внутреннее произведение, являющееся вектором, который также лежит в плоскости $i_{b\alpha}$ и который есть составляющая x, лежащая в данной плоскости (рис.9).

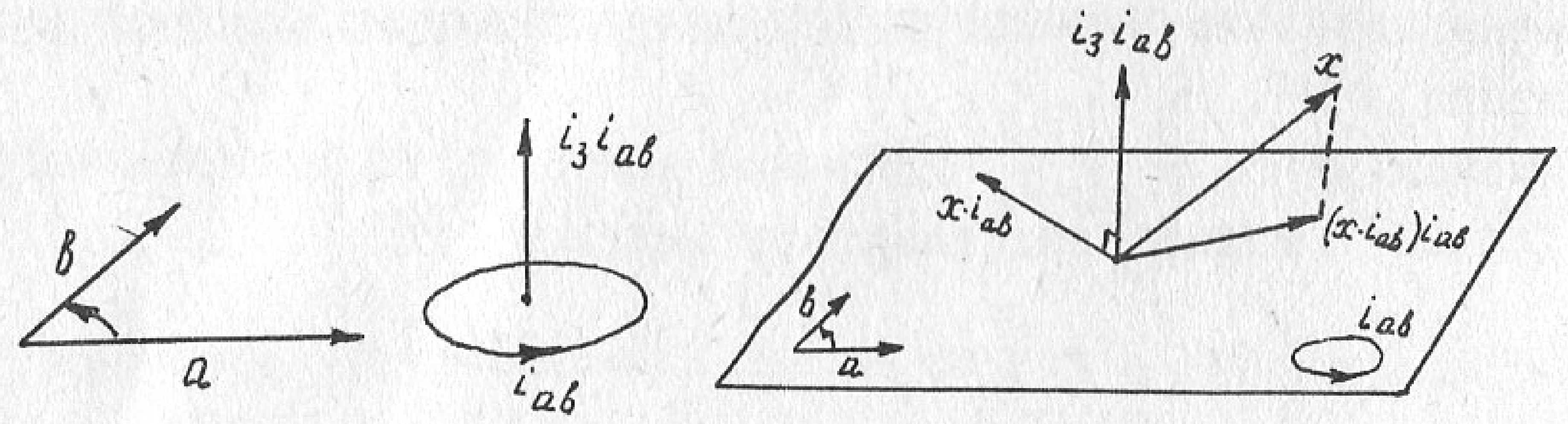

Рис.9

Внешнее произведение $x\wedge i_{\alpha b}$ есть ориентированный объем, причем ориентация определяется порядком векторов в тройке $\{a, b, x\}$. Произведение $x\wedge i_{\alpha b}$ на бивектор $i_{b\alpha}$ - это вектор, пропорциональный двойственному бивектору $i_{b\alpha}$, т.е. ортогональный плоскости $i_{b\alpha}$.

Выполнив разложение, получаем

$$U x_\parallel \overline{U} = (\cos|\theta| + i_{b\alpha}\sin|\theta|)\, x_\parallel\, (\cos|\theta| - i_{b\alpha}\sin|\theta|) =$$

$$= x_\parallel \cos^2|\theta| + i_{b\alpha} x_\parallel \sin|\theta|\cos|\theta| - x_\parallel i_{b\alpha}\sin|\theta|\cos|\theta| - \sin^2|\theta|\, i_{b\alpha} x_\parallel i_{b\alpha} .$$

Вспоминая геометрический смысл двойственности в C_2, видим, что $i_{b\alpha} x_\parallel$ получается поворотом $x_\parallel$ в плоскости $i_{b\alpha}$ на $\pi/2$ против направления ориентации $i_{b\alpha}$, а $x_\parallel i_{b\alpha}$ - по направлению ориентации $i_{b\alpha}$. Поэтому $i_{b\alpha} x_\parallel - x_\parallel i_{b\alpha} = -2x_\parallel i_{b\alpha}$.

По той же причине $i_{b\alpha} x_\parallel i_{b\alpha} = x_\parallel$. Тогда

$$U x_\parallel \overline{U} = x_\parallel \cos 2|\theta| - x_\parallel i_{b\alpha} \sin 2|\theta| = x_\parallel \cos 2|\theta| + x_\parallel i_{\alpha b} \sin 2|\theta| .$$

Следовательно, мы получили поворот $x_\parallel$ в плоскости $i_{\alpha b}$ на угол $2|\theta|$ в направлении ориентации бивектора $i_{\alpha b}$. Это геометрически очевидный результат: последовательное отражение относительно двух векторов дает поворот в плоскости этих векторов на удвоенный угол между ними.

Для ортогональной составляющей $i_{b\alpha} x_\perp = x_\perp i_{b\alpha}$, так как здесь играет роль только взаимная ориентация $i_{b\alpha}$ и $x_\perp$, а не порядок перемножения. Тогда

$$i_{b\alpha} x_\perp i_{b\alpha} = -x_\perp .$$

Следовательно,

$$U x_\perp \overline{U} = x_\perp \cos^2|\theta| + x_\perp \sin^2|\theta| = x_\perp .$$

Окончательно приходим к следующему результату. Преобразование

$$x \longrightarrow U x \overline{U} ,$$

в котором U - мультивектор вида

$$U = \cos|\theta| + i_S \sin|\theta| ,$$

где i_S- единичный бивектор ориентированной плоскости S, осуществляет поворот вектора x на угол $2|\theta|$ вокруг оси, ортогональной к S, причем направление поворота противоположно ориентации S.

Если изменить ориентацию S , то

$$U = \cos|\theta| - i_S \sin|\theta| ;$$

$$\overline{U} = \cos|\theta| + i_S \sin|\theta| .$$

Следовательно, преобразование

$$x' = \overline{U} x U ,$$

где $U = \cos|\theta| + i_S \sin|\theta|$ есть вращение в плоскости S на угол $2|\theta|$ в направлении, совпадающем с ориентацией S .

Мультивектор из C_3 вида

$$\cos\alpha + i_S \sin\alpha ,$$

где α - скаляр, а i_S - единичный бивектор ориентированной плоскости S в трехмерном пространстве, является "комплексным числом", т.е. четным элементом алгебры C_2 на ориентированной плоскости S . Часто используется традиционное обозначение:

$$\cos\alpha + i_S \sin\alpha = e^{i_S\alpha} .$$

Порядковое сопряжение, примененное к такому мультивектору, является комплексным сопряжением в плоскости S :

$$\overline{\cos\alpha + i_S \sin\alpha} = \cos\alpha - i_S \sin\alpha = e^{-i_S\alpha} .$$

Таким образом, вращение в ориентированной плоскости S на произвольный угол φ в направлении ориентации S записывается в виде

$$x \longrightarrow e^{-\frac{1}{2} i_S \varphi} x e^{\frac{1}{2} i_S \varphi} .$$

Мультивекторы вида $U = \cos\alpha + i_S \sin\alpha$ будем в дальнейшем называть единичными или унитарными спинорами.

Если два спинора имеют одну и ту же плоскость S бивекторной части, то очевидно, что они коммутируют как комплексные числа в плоскости S . Следовательно, коммутируют и вращения относительно фиксированной оси.

Если плоскости спиноров различны, то их произведение будет

$$U_2 U_1 = (\cos\alpha_1 + i_{S_1} \sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i_{S_2} \sin\alpha_2) =$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos(\widehat{S_1, S_2}) + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2\, i_{S_1} +$$

$$+ \sin\alpha_2 \cos\alpha_1\, i_{S_2} - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin(\widehat{S_1, S_2})\, i_{S_1} \wedge i_{S_2} .$$

Первые два скалярных члена определяют косинус угла результирующего поворота

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos(\widehat{S_1, S_2}) .$$

Три последних члена в сумме дают бивектор, определяющий ориентированную плоскость вращения:

$$i_S \sin\varphi = i_{S_1} \sin\alpha_1 \cos\alpha \quad + i_{S_2} \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 -$$

$$- i_{S_1} \wedge i_{S_2} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin(\widehat{S_1, S_2}) .$$

Два последовательных вращения в различных плоскостях не коммутируют, так как в произведениях $U_2 U_1$ и $U_1 U_2$ разные знаки последнего члена в результирующем бивекторе, т.е. плоскость результирующего поворота зависит от порядка следования вращений.

В вычислительных алгоритмах обычно не имеет смысла искать результирующий угол и плоскость поворота последовательности вращений, так как достаточно выполнять в нужном порядке отдельные вращения.

Подалгебра унитарных спиноров, задающих вращения, является телом, т.е. каждый унитарный спинор имеет обратный:

$$U^{-1} = \overline{U} .$$

Унитарные спиноры - это частный случай четных элементов алгебры C_3, т.е. элементов вида

$$Q = \alpha + \beta i_S ,$$

где α и β - скаляры ; i_S - единичный бивектор некоторой ориентированной плоскости S. Такие элементы удовлетворяют равенству $Q = \widetilde{Q}$ и обычно называются кватернионами.

В подалгебре кватернионов можно ввести скалярное произведение

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle = \frac{1}{2} (Q_1 \overline{Q}_2 + Q_2 \overline{Q}_1) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 ,$$

порождающее норму

$$\| Q \| = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Кватернионы образуют также тело:

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{\|Q\|^2} .$$

Представление вращений бескоординатными спинорами $exp\{\frac{1}{2} i_S \varphi\}$ можно параметризировать. Возьмем вектор a, которому двойствен бивектор $i_S \varphi$:

$$i_3 a = i_S \varphi .$$

Спинор, представляющий вращение, можно тогда записать в виде

$$U = \cos \frac{a}{2} + i_3 \sin \frac{a}{2} .$$

При такой записи надо подразумевать, что функция косинус, четная для скалярного аргумента, сохраняет это свойство для векторных аргументов, т.е. не "чувствует" направления вектора:

$$\cos \frac{a}{2} = \cos \frac{|a|}{2} .$$

Нечетная же для скалярных аргументов функция синус сохраняет это свойство в обобщенном смысле:

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{a}{|a|} \sin \frac{|a|}{2} ,$$

т.е. синус вектора есть вектор, коллинеарный аргументу. Тогда

$$U = \cos \frac{|a|}{2} + i_3 \frac{a}{|a|} \sin \frac{|a|}{2} .$$

Скаляр $\alpha = \cos \frac{|a|}{2}$ и три компоненты вектора $b = \frac{a}{|a|} \sin \frac{|a|}{2}$:

$$\beta_i = \frac{a}{|a|} \sin \frac{|a|}{2} \cdot e_i , \quad i = 1, 2, 3 ,$$

называются параметрами Эйлера заданного вращения.

Рассмотрим теперь, что означает для вращения изменение знака определяющего спинора. Результат вращения от этого, конечно, не изменится:

$$\overline{U} x U = \overline{(-U)} x (-U) .$$

Представим изменение знака как вращение в плоскости S бивекторной части спинора U на угол π. Это станет очевидным, если вспомнить, что спиноры в определенном смысле можно отождествлять с комплексными числами, только комплексная плоскость у каждого спинора своя. Запишем:

$$-U = e^{i_S\pi} e^{\frac{1}{2} i_S \varphi} = e^{\frac{1}{2} i_S(\varphi+2\pi)}.$$

Видно, что изменение знака спинора увеличивает угол вращения на 2π с тем же окончательным результатом вращения. Знак U можно изменить по-другому:

$$-U = e^{-i_S\pi} e^{\frac{1}{2} i_S \varphi} = e^{\frac{1}{2} i_S(\varphi-2\pi)},$$

что дает поворот, приводящий в то же положение, но совершаемый в противоположном направлении. Все это показывает, что спинор не только определяет начальное и конечное положения, но и как-то "помнит историю" вращения в своей плоскости.

3.3. Непрерывные вращения

Рассмотрим непрерывное вращение трехмерного вектора, определяемое унитарным спинором $U(t)$, зависящим от времени:

$$x(t) = \overline{U(t)}\, x\, U(t),$$

где $x = x(0)$.

Покажем, что спинор $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{2} U(t)\Omega(t),$$

где $\Omega(t)$ - некоторый бивектор.

Дифференцируя по времени тождество

$$\overline{U}(t)\, U(t) = 1,$$

получим

$$\dot{\overline{U}}(t)\, U(t) + \overline{U}(t)\dot{U}(t) = 0.$$

Умножим слева на $U(t)$, тогда

$$\dot{U}(t) = -U(t)\dot{\overline{U}}(t)\, U(t).$$

Произведение $\dot{\overline{U}}(t)U(t)$ является четным элементом, так как $U(t)$ - четный элемент. Кроме того,

$$\overline{(\dot{\overline{U}}\, U)} = -(\overline{U}\,\dot{U}) = -\dot{\overline{U}}\, U,$$

поскольку операция порядкового сопряжения для любых мультивекторов M_1 и M_2 удовлетворяет условию

$$\overline{(M_1 M_2)} = \overline{M}_2\, \overline{M}_1.$$

Следовательно, четный элемент $\Omega(t) = -2\dot{\overline{U}}(t)\, U(t)$ удовлетворяет равенству

$$\overline{\Omega(t)} = -\Omega(t).$$

Это означает, что у него отсутствует скалярная часть (не меняющаяся при сопряжении). Значит, $\Omega(t)$ - бивектор.

Двойственный бивектору Ω вектор ω, $\omega = i_3\Omega$, принято называть угловой скоростью вращения.

Получим дифференциальное уравнение, которому будет удовлетворять вектор $x(t) = \overline{U(t)}\, x\, U(t)$. Дифференцируя это равенство и учитывая дифференциальное уравнение для $U(t)$, получаем:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\overline{U}}{dt} xU + \overline{U}x\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}\overline{\Omega}\,\overline{U}xU + \frac{1}{2}\overline{U}xU\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x(t)\Omega(t) - \Omega(t)x(t)\right) \equiv x(t)\cdot\Omega(t).$$

В терминах угловой скорости $\omega(t) = i_3 \Omega(t)$ получаем

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2} i_3(\omega(t)x(t) - x(t)\omega(t)) = i_3\omega(t)\wedge x(t) =$$

$= x(t)\times\omega(t)$ (обычное векторное произведение).

Предположим, что имеется движение $x(t)$ в некоторой системе координат, изменяющей свое положение относительно другой, "неподвижной", системы через вращение, определяемое унитарным спинором $U(t)$. Например, $x(t)$ есть движение материальной точки внутри космического корабля, наблюдаемое космонавтом, а сам корабль изменяет свою ориентацию относительно звезд в соответствии с $U(t)$. Тогда в звездной системе координат мы наблюдаем

$$x'(t) = \overline{U}(t)x(t)U(t).$$

Теперь дифференциальное уравнение для $x'(t)$ будет иметь вид

$$\frac{dx'(t)}{dt} = \frac{d\overline{U}}{dt}xU + \overline{U}\frac{dx}{dt}U + \overline{U}x\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}(\Omega\overline{U}xU +$$

$$+\overline{U}xU\Omega) + \overline{U}\frac{dx}{dt}U.$$

Если выполнить измерение скорости материальной точки в звездной системе в какой-то отдельный момент времени (который всегда можно считать нулевым, т.е. вращение, определяемое $U(t)$, только начинается), то получим известную связь между скоростями в неподвижной и вращающейся системах:

$$v'(t) = v(t) + x(t)\cdot\Omega(t) = v(t) + x(t)\times\omega(t),$$

где $v(t)$ - скорость в "сопутствующей" системе, которая вращается в "неподвижной" системе с угловой скоростью ω.

Выполняя повторное дифференцирование, можно получить связь между измеренными значениями ускорений:

$$a'(t) = a(t) + \dot{\omega}(t)\times x(t) + 2\omega(t)\times v(t) + \omega(t)\times(\omega(t)\times x(t)).$$

§ 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ НА ЯЗЫКЕ C_3

4.I. Уравнения Максвелла на языке клиффордовой алгебры

Пусть известны электрическая e и магнитная h - составляющие электромагнитного поля. Образуем элемент клиффордовой алгебры C_3 вида

$$F = e + i_3 h.$$

Предположим, что данное электромагнитное поле создается известным распределением зарядов ρ и токов j, из которых также образуем мультивектор

$$\mathcal{J} = \rho - j.$$

Каждая из величин e, h, ρ, j зависит от координат и времени.

Применим к мультивектору F оператор $\partial_t + \nabla$, рассматривая его действие как умножение в C_3:

$$(\partial_t + \nabla)F = (\partial_t + \nabla)(e + i_3 h) = \partial_t e + \nabla e + i_3\partial_t h + i_3\nabla h =$$

$$= \underbrace{\nabla\cdot e}_{\text{скаляр}} + \underbrace{\partial_t e + i_3(\nabla\wedge h)}_{\text{вектор}} + \underbrace{\nabla\wedge e + i_3\partial_t h}_{\text{бивектор}} + \underbrace{i_3(\nabla\cdot h)}_{\text{псевдоскаляр}}.$$

Приравнивая покомпонентно полученный результат к мультивектору $\mathcal{J}$, получаем четыре уравнения:

$$\nabla\cdot e = \rho;$$

$$\partial_t e + i_3(\nabla\wedge h) = -j;$$

$$\nabla\wedge e + i_3\partial_t h = 0;$$

$$i_3(\nabla\cdot h)=0.$$

Учитывая, что для трехмерных векторов

$$i_3(a\wedge b)=-a\times b,$$

где $\times$ обозначает обычное векторное произведение, а оператор Гамильтона дает дивергенцию и ротор по правилам:

$$\nabla\cdot a=\mathrm{div}\,a;$$
$$\nabla\times a=\mathrm{rot}\,a,$$

получаем после умножения третьего уравнения на i_3:

$$\mathrm{div}\,e=\rho;$$
$$\partial_t e-\mathrm{rot}\,h=-j;$$
$$\partial_t h+\mathrm{rot}\,e=0;$$
$$\mathrm{div}\,h=0,$$

т.е. обычную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля (e,h), образуемого распределением зарядов и токов (ρ,j). Следовательно, в терминах алгебры C_3 система уравнений Максвелла записывается одним уравнением:

$$(\partial_t+\nabla)F=\mathcal{J}.$$

4.2. Плоские электромагнитные волны в свободном пространстве

Возьмем $\mathcal{J}=0$ и будем искать решение уравнения

$$(\partial_t+\nabla)F=0$$

в виде "плоской волны":

$$F=f\exp[i_S(\omega t-k\cdot x)].$$

Здесь f – постоянный элемент алгебры C_3, i_S – единичный элемент ориентированной плоскости S в трехмерном пространстве.

Элемент $\exp[i_S(\omega t-k\cdot x)]$ состоит из скалярной и бивекторной частей, причем последняя лежит в плоскости S. Поле F есть сумма вектора e и бивектора $i_3 h$. Определим, каким условиям должен удовлетворять мультивектор f, чтобы искомое выражение для F имело смысл. Записывая

$$f=f_S+f_V+f_B+f_{\mathcal{P}},$$

$$\exp[i_S(\omega t-k\cdot x)]=[\exp]_S+[\exp]_B,$$

получаем

$$F=f_S[\exp]_S+f_V[\exp]_S+f_B[\exp]_S+f_{\mathcal{P}}[\exp]_S+f_S[\exp]_B+$$
$$+f_V[\exp]_B+f_B[\exp]_B+f_{\mathcal{P}}[\exp]_B.$$

В этом выражении скалярная и псевдоскалярная части должны быть равны 0:

$$f_S[\exp]_S+[f_B[\exp]_B]_S=0;$$
$$f_{\mathcal{P}}[\exp]_S+[f_V[\exp]_B]_{\mathcal{P}}=0.$$

В частном случае это выполняется, если скалярная и псевдоскалярная части f равны 0, векторная часть f лежит в плоскости S, а бивекторная ортогональна плоскости S. Тогда, если взять S в качестве плоскости, порождающей алгебру C_2, выражение $f\exp[i_S(\omega t-k\cdot x)]$ будет определять поворот вектора f_V в плоскости S на угол $\omega t-k\cdot x$ по направлению ориентации S и аналогичный поворот плоскости бивектора вокруг оси, ортогональной плоскости S.

Дифференцирование тогда дает поворот еще на $\frac{\pi}{2}$ (с изменением длины):

$$(\partial_t + \nabla)F = (\partial_t + \nabla)f\,exp\left[i_S(\omega t - k\cdot x)\right] = (\omega - k)Fi_S \,,$$

и мы приходим к уравнению

$$(\omega - k)(F_V + F_B) = 0.$$

Положим $|k| = \omega$, тогда

$$F_V + F_B = \hat{k}\,(F_V + F_B)\,,$$

где $\hat{k}$ - единичный вектор по направлению k .
Следовательно,

$$e + i_3 h = \hat{k}\,(e + i_3 h).$$

Приравнивание векторных и бивекторных частей дает одно и то же уравнение

$$e = \hat{k}\, i_3 h\,,$$

откуда $i_3 h = \hat{k} e$ и $F = (1 + \hat{k})e$. Возводя $i_3 h = \hat{k} e$ в квадрат, получаем $h^2 = e^2$, поэтому

$$\hat{k} e h = i_3 h^2 = i_3 |h||h|\,;$$
$$\hat{k}\hat{e}\hat{h} = i_3\,,$$

где $\hat{e}$ и $\hat{h}$ - единичные векторы, направленные по e и h .

В результате $\hat{k}$, $\hat{e}$ и $\hat{h}$ образуют тройку взаимно ортогональных векторов, задающих ту же ориентацию трехмерного пространства, что и i_3 .

Получается обычная поляризованная по кругу плоская электромагнитная волна, причем направление распространения $\hat{k}$ автоматически связано с вращением e в плоскости поляризации S через заданную ориентацию трехмерного пространства.

О Г Л А В Л Е Н И Е

§ I. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ 3

I.I. Произведение двух векторов 3
I.2. Линейное пространство бивекторов 5
I.3. Произведение вектора и бивектора 8
I.4. Псевдоскаляры 9
I.5. Произведение двух бивекторов I0
I.6. Умножение на псевдоскаляр II
I.7. Общий элемент алгебры Клиффорда C_3 .... I3
I.8. Базис в C_3, порождаемый ортонормированными векторами I4
I.9. Алгебраическое умножение в базисных компонентах I5

§ 2. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ I7

2.I. Алгебра C_1 .... I7
2.2. Алгебра C_2 .... I9
2.3. Алгебра C_2 и комплексные числа 23
2.4. Матричный базис в C_2 25
2.5. Матричный базис, порождающий C_3 27
2.6. Алгебраическое умножение в матричном базисе 3I
2.7. Алгебра C_3 в матричной записи 36

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В C_3 39

3.I. Отражения 39
3.2. Конечные вращения 4I
3.3. Непрерывные вращения 48

§ 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ НА ЯЗЫКЕ C_3.......... 51

4.1. Уравнения Максвелла на языке клиффордовой алгебры.......................... 51

4.2. Плоские электромагнитные волны в свободном пространстве...................... 52

Александр Михайлович Сойгин

Методы векторной алгебры в прикладных задачах

Редактор О.Ю.Сакулина
Технический редактор Т.К.Галаничева
Корректор Р.Р.Ковязина

Сдано в набор 22.05.89 г. Подписано к печати 18.01.90 г.
Формат бумаги 30х44.
Печ.л.3,5. Усл.печ.л.3,25. Уч.-изд.л.2,4.
Заказ 154. Г-132051. 1990 г.
Цена 24 коп.
Для внутриведомственной продажи

Типография ВМА.

Б